Francesca Boccuni, *Logicismo Plurale*, Aracne, 2012, pp. 192, €12.00, ISBN 8854851213

Francesco Maria Ferrari, Università degli Studi di Padova

L'essenza del *logicismo* riposa sulla natura logica dei predicati che assicurerebbe una fondazione esclusivamente logica dell'edificio matematico, se fosse possibile operare la riduzione dell'aritmetica ad una teoria dei concetti. Le classi come estensioni e referenti dei predicati/concetti erano considerate da Frege oggetti logici, in quanto determinate univocamente dai concetti. Esito del logicismo fu così la riduzione della nozione di *Numero Naturale* ad una nozione prettamente logica. È storia, però, che i predicati nella loro versione estensionale si rivelassero il punto nodale sia del logicismo fregeano sia del suo fallimento. L'esigenza di una revisione, dunque, era reale già allora. In *Logicismo plurale*, l'Autore considera un'estensione consistente dei sottosistemi predicativi dei *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903) di Gottlob Frege. Il sistema presentato viene chiamato *Grundgesetze plurali* (PG).

La strategia di revisione che anima questo contributo essenzialmente è questa: non evitare l'inconsistenza dell'apparato fregeano mediante ipotesi *ad hoc*, ma spostarne il centro teoretico-logico. In tal senso, la *logica plurale* (Boolos) e la *semantica degli atti di scelta* (Martino) sono gli strumenti utilizzati affinché il cardine dell'approccio logicista non si risolva più nei concetti, bensì negli oggetti individuali del primo ordine. Il sistema formale PG offrirebbe una rivisitazione del programma logicista. Lo sfruttamento di una condizione sui fondamenti logici del programma fregeano rimane caratteristico in PG: la non necessità di oltrepassare una logica del secondo ordine.

Nei primi due capitoli viene offerto un *excursus* logico-storico del programma logicista, atto ad osservare le ragioni dell'antinomia presente nei *Grundgesetze* e le conseguenti ragioni logico-teoretiche portate dai tentativi di darne una soluzione soddisfacente ma che si riveleranno inaccettabili.

Nel capitolo I vengono esposti le caratteristiche e i principi del sistema fregeano. Essenzialmente, essi consistono da un lato di una logica dei predicati che comprende tra i suoi assiomi quelli della logica proposizionale e quelli della teoria della quantificazione di ordine n, dall'altro gli assiomi che riguardano le estensioni, in particolare la cosiddetta *Legge V* o *Assioma di Estensionalità* (*Est*) e l'*Assioma di Comprensione* (*CP*). Il primo altro non fa che esprimere il criterio estensionale di identità per estensioni, i referenti dei concetti, stabilendo che per ogni qualsiasi estensione *F* e *G*, l'estensione *F* è identica all'estensione *G* se, e soltanto se, *F* e *G* sono estensionalmente equivalenti, ovvero se e solo se due estensioni qualsiasi hanno gli stessi elementi. Diversamente, il secondo stabilisce l'esistenza di una relazione biunivoca estensionale e fissa fra formule predicative ed estensioni. *CP* esprime la *Regola di Sostituzione* per formule ed estensioni. È una legge sì schematica, però necessaria al sistema estensionale affinché *Est* sia valido. Se così non fosse, esisterebbero dei termini vuoti per estensioni, pur avendo un concetto a definirli; ma ciò violerebbe la logica matematica, perché ci sarebbero istanze di *Est* alle quali non sarebbe possibile assegnare un valore di verità.

L'interrelazione, dunque, di *Est* e *CP* costituisce la base estensionale del fallimento logicista: l'*impredicatività* di *CP*, emersa per il rinvenimento del 1902, ad opera di Bertrand Russell, dell'antinomia omonima dei *Grundgesetze*. Tale antinomia, che si inscrive nel più esteso panorama della *crisi dei fondamenti* della matematica, può essere sinteticamente formulata come segue: per *CP*, al predicato "estensione di tutte le estensioni che non appartengono a se stesse" (*K*) corrisponde una estensione ($\{y: Ky\}$); se tale estensione cade sotto *K*, allora essa non cade sotto *K*; se essa non cade sotto *K*, allora essa cade sotto *K*. Quindi, l'estensione di *K* cade sotto *K* se, e solo se, essa non cade sotto *K*.

Tale antinomia fu impressionante perché ha natura squisitamente sintattica: dipende, cioè, dalla natura univoca ed estensionale della predicazione, espressa dalla relazione primitiva di "cadere sotto". Fu per la presenza di questa antinomia che si infranse il fine di ridurre l'aritmetica elementare del secondo ordine (PA^2), cui l'intera matematica era già stata ridotta, alla logica.

Nel capitolo II, l'Autore affronta vari tentativi di soluzione alle questioni fondamentali, emerse con l'antinomia, circa la coerenza del sistema di assiomi che definiva il progetto di Frege. Le elenchiamo senza dilungarci troppo, 1) la teoria dello *zig zag* nega *CP*: in essa è però ora facilmente derivabile il *Teorema dell'Insieme Potenza* che pone una contraddizione analoga a quella russelliana; 2) la teoria della *limitazione della grandezza* bandisce le classi *eccessivamente grandi*: poiché mantiene *CP* non sa giustificare un criterio di decisione del limite delle dimensioni delle classi; 3) la *teoria senza classi* tratta le classi come mere *finzioni logico-linguistiche*: l'insorgenza stessa della antinomia viene letteralmente evitata; 4) la *teoria dei tipi*, nella versione *semplice*, restringe *CP*: stratifica il simbolismo in una gerarchia di funzioni proposizionali tale che ogni funzione proposizionale è definita nei termini di una totalità di entità, ma questa è costituita da entità esistenti al livello immediatamente inferiore a quello della funzione proposizionale definita, così non si permette alcuna definizione *impredicativa* al prezzo, però, di assumere *ad hoc* l'ulteriore *Assioma dell'Infinito*; 5) ne fu poi costruita la versione *ramificata* mediante l'introduzione dell'*Assioma di Riducibilità*: questo però postula l'esistenza, per qualsiasi funzione proposizionale, di una funzione predicativa formalmente equivalente, rendendo superflua la restrizione predicativa di *CP*; 6) la corrente *predicativista* non permette formule di comprensione contenenti quantificazione su variabili predicative: *Est* viene automaticamente ristretto al primo ordine e il sistema diviene sì consistente, ma matematicamente limitato ben al di sotto di PA^2, tradendo l'intenzione logicista.

Con il capitolo III l'Autore presenta il sistema di Boolos che fornisce una versione della logica dei predicati del secondo ordine che, facendo uso della *quantificazione plurale*, non assume alcuna assunzione sull'esistenza di entità di ordine superiore al primo. Boolos prende le mosse dalla nozione naturale di *riferimento plurale* (a più individui): il riferimento a classi o proprietà è eliminato perché le variabili del secondo ordine variano *direttamente* su individui dell'universo del discorso, *considerati pluralmente*. Tale proposta si basa sull'interpretazione del quantificatore esistenziale (primitivo) come "*ci sono degli X* tali che". La semantica, nelle clausole per l'interpretazione delle formule con variabili predicative con quantificazione plurale, prevede una relazione di *assegnazione R uno-molti*: *R* cioè correla un unico individuo ad ogni variabile del primo ordine, mentre non è soggetta a restrizioni sulle variabili del secondo ordine, cui può correlare zero, uno o più individui. In ogni caso, si quantifica soltanto su costanti individuali.

La logica sviluppata da Boolos prende esplicito spunto da una distinzione già russelliana fra l'ordinaria *class as one*, riducibile ad unità passibile di cadere sotto ulteriori classi, e *class as many*

che per definizione non permette ciò, non implicando così l'antinomia russelliana. Così, la logica dei predicati del secondo ordine dispone degli individui dell'universo in modi non rinvenibili nella logica del primo ordine: le variabili del primo e del secondo ordine non variano più, rispettivamente, su individui e collezioni di questi; ci sono, piuttosto, due modi diversi di riferirsi agli stessi individui.
Obiezioni a tale sistema derivano dall'essere primitiva della nozione di *rifermento plurale*. Il capitolo IV presenta la semantica di Martino che, in quanto teoria del riferimento arbitrario, è capace di definire la nozione di *riferimento plurale*. Martino stesso osserva che essenziale allo stesso ragionamento matematico è la capacità di potersi riferire e *direttamente* e a *qualunque* oggetto dell'universo, anche nel caso in cui nel linguaggio non vi sia un nome per ogni oggetto (*tesi del riferimento ideale* (TIR)). La nozione di *riferimento arbitrario* presenta entrambe tali caratteristiche essenziali: i) l'*arbitrarietà*, che garantisce generalità nel suo riferirsi a *qualsiasi* individuo *a* dell'universo; e ii) la *determinatezza*, che garantisce precisione referenziale, distinguendo il riferimento ad un individuo *a* da quello sugli altri dell'universo. Si potrebbe obiettare, però, che il riferimento arbitrario non sia genuino, dato che le variabili libere e i nomi arbitrari non si riferiscono per nulla. In questa sezione, l'Autore cerca di fornire un argomento per la genuinità del riferimento arbitrario e per la necessità che lo si intenda come riferimento diretto.
Negli ultimi due capitoli si presenta, anche filosoficamente, il sistema PG in cui si evidenzia e quale sia l'eredità logicista che la proposta accetta di incorporare e quali siano i punti di radicale riforma.
Il capitolo V affronta la presentazione di PG nella sua struttura. L'interpretazione *sostituzionale* della quantificazione su variabili predicative non lascia spazio all'esistenza dei concetti. Nonostante ciò, le estensioni mantengono esistenza e natura di oggetti genuini dati *a priori*, sebbene non primitivamente estensionali. *La legge di identità degli indiscernibili* distinguerà una estensione da un altro individuo del dominio del discorso, secondo la medesimezza dell'atto di designazione: *a* e *b* sono identici se, e solo se, i loro *designata* sono scelti all'interno dei medesimi atti di scelta plurale. Il sistema PG è predicativo ma non come la corrente predicativista vorrebbe, infatti non si condivide il rifiuto dell'infinità attuale di alcuni domini di

quantificazione: l'Autore stesso, per l'uso che fa della predicatività, ritiene la proposta PG più affine alla formulazione logicista che Russell offre nei *Principia Mathematica*. Infatti, tra gli assiomi di PG figurano, oltre che quelli logici, di un *CP plurale* e di uno per i *predicati*, oltre che una formulazione schematica di *Est*, a garanzia dell'esistenza di infinite costanti individuali (necessario in PG per assicurare che gli assiomi di PA^2 possano essere in essa derivati). Da ultimo, si dà prova della consistenza di PG. Tale è una revisione radicale dell'impianto logicista eppure, in esso, risulta possibile mantenere l'ontologia fregeana delle estensioni e l'assunzione della esistenza di un oggetto per ogni concetto.
Il capitolo VI è dedicato, infine, all'analisi dei motivi filosofici a giustificazione delle ragioni di questa revisione predicativa ed anti-platonista, ma consistente, del sistema fregeano.
Il punto notevole e di contatto, che ritroviamo in questa ricerca, è l'aver seguito Frege nel sostenere che a ciascun livello superiore non esistono mai entità in un numero maggiore (concetti e relazioni) di quelle del livello inferiore, in quanto già nel caso fregeano gli oggetti logici dal secondo livello in poi non sono veri e propri concetti, bensì *operatori che legano variabili*: i quantificatori, perciò, diversamente dai predicati, possono essere commutati ed iterati come pure posti gli uni entro il raggio d'azione di altri. Infatti, nella logica fregeana si afferma che tutti i concetti e relazioni di secondo livello e oltre (quantificatori) possono essere "correlati con" e "rappresentati da" concetti e relazioni di primo livello (predicati) i quali, a loro volta, possono essere correlati e rappresentati dai loro corsi di valori (argomenti definiti su un supporto).

Bibliografia

Joseph M. Bochènski, *La logica formale*, Einaudi, 1972.
Carlo Cellucci, *La filosofia della matematica del Novecento*, Laterza, 2007.
Nino B. Cocchiarella, *Formal Ontology and Conceptal Realism*, Springer, 2007.
Id., "Logic and Ontology", *Axiomathes*, 2001, 12: pp.117-150.
Gottlob Frege, *Senso, funzione e concetto*, Laterza, 2007.
Ludovico Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Bollati Boringhieri, 2008.
Dirk Van Dalen, *Logic and Structure,* Springer-Verlag, 1997.