Riccardo Bruni, *Kurt Gödel, un profilo*, Carocci, Roma 2015, pp. 172, € 14.00, ISBN 9788843075133

Michele Pra Baldi, Università degli Studi di Padova

La figura di Kurt Gödel e i risultati delle sue ricerche, che tutti gli studiosi nel campo della logica matematica ben conoscono, hanno spesso destato l'interesse anche da parte di ricercatori di altre discipline. Per questi ultimi tuttavia, non è raro che la natura tecnica dei contributi di Gödel rappresenti un ostacolo per una loro buona comprensione. Il volume di Bruni, che ripercorre l'evoluzione del pensiero e della produzione scientifica di Gödel, ha il merito di riformulare efficacemente in modo informale proprio quei risultati che, per i non addetti ai lavori, spesso sono di difficile accesso.
I sei capitoli che compongono il testo, oltre a esaminare con attenzione i risultati più importanti e conosciuti del logico moravo, contengono anche un'analisi dei suoi contributi tecnici meno noti (capitolo 5), così come un'ampia discussione del rapporto tra il lavoro tecnico di Gödel e il panorama filosofico del tempo. Al termine di ogni capitolo, inoltre, è posto un paragrafo dal titolo "complementi storici e bibliografici", che fornisce una valida risorsa per comprendere la cronologia delle più importanti scoperte logico-matematiche del '900 e dei vasti contatti che Gödel intratteneva con i membri della comunità scientifica dell'epoca.
Oggetto del primo capitolo è il contesto storico e culturale di inizio novecento, ovvero quello in cui si svolge la prima parte della vita di Gödel. Particolare attenzione è posta sullo sviluppo della logica matematica risalente a quel periodo, dovuto principalmente al lavoro di personalità di spicco come Hilbert, Dedekind, Peano, Frege, Russell e Whitehead.
Dopo aver richiamato alcune nozioni decisive per la logica del prim'ordine come quelle di verità logica, contraddizione e modello di una teoria, il capitolo due prende in esame il primo celebre contributo di Gödel, ovvero il teorema di completezza semantica per la logica predicativa classica (LPC). Il teorema di completezza di LPC, la cui prima formulazione è contenuta nella dissertazione dottorale di Gödel del 1929, corrisponde intuitivamente a mostrare che ogni formula di LPC logicamente vera è anche dimostrabile all'interno di LPC per mezzo dei suoi assiomi e delle sue regole. In altre parole, il risultato di

completezza consente di mettere in relazione la nozione semantica di *verità logica* con quella sintattica di *derivazione*. Di particolare interesse è la ricostruzione delle varie formulazioni del teorema: da quella iniziale del 1929, fino a quella formulata nel 1949 da Henkin, che tutt'oggi viene usualmente presentata nella maggior parte dei testi di logica. Il teorema di completezza, come osservato in conclusione di capitolo, apre le porte alla questione del rapporto tra la *consistenza* di un insieme di formule e l'*esistenza* di un modello che le renda vere. Queste due nozioni, a cui Gödel dedica particolare attenzione nella prima parte della sua tesi di dottorato, sono imprescindibili per comprendere il risultato senza dubbio più noto di Gödel, ovvero i suoi teoremi di incompletezza, oggetto del capitolo terzo.
Le risorse tecniche necessarie per formulare il primo teorema di incompletezza di Gödel sono efficacemente presentate nei tre paragrafi compresi tra il 3.1 e il 3.3. Il primo di questi introduce le nozioni di insieme e funzione ricorsiva, fino all'enunciazione del *Teorema di rappresentabilità,* il cui senso informale è che per ogni funzione ricorsiva f, se vale che $f(n)=m$ allora esiste una formula A che, all'interno dell'aritmetica di Peano (P), afferma che "il valore della funzione f sul numero n è m" (p.59). In questo senso, si dice che A è una formula che rappresenta in P la funzione f, poiché di A sono dimostrabili in P tutte le istanze vere che coincidono proprio con i valori che f assegna ai suoi argomenti. Il paragrafo successivo si concentra invece sull'*aritmetizzazione della sintassi*, descrivendo in che modo è possibile codificare la sintassi di P mediante l'uso di numeri naturali. Associando univocamente un numero ad ogni simbolo dell'alfabeto di P, è possibile codificare formule e liste di formule di P. Questo processo è di fondamentale importanza poiché consente di esprimere le proprietà sintattiche di P all'interno della stessa teoria P o, in altri termini, consente di parlare di P all'interno di P. Ad esempio, consideriamo l'insieme dei codici dei teoremi di P: il fatto che tale insieme sia ricorsivamente numerabile, insieme al già menzionato teorema di rappresentabilità, implica che esista una formula T dimostrabile in P per i termini corrispondenti ai codici dei teoremi di P.
L'ultimo paragrafo che precede la formulazione del primo teorema di incompletezza ha come oggetto il *lemma di diagonalizzazione*, ovvero lo strumento con cui in seguito verrà

costruito il famoso enunciato G di Gödel, che sancirà l'incompletezza di P. Tale lemma, in modo informale, garantisce che per ogni formula $A(x)$ in cui x è l'unica variabile libera esista una formula B per cui in P vale $B \leftrightarrow A(\#B)$, dove $\#B$ è il termine corrispondente al codice numerico di B. In altre parole, "l'enunciato diagonale B dice di sé stesso di possedere la proprietà rappresentata da A" (p.70). Ora, applicando il lemma alla formula $\neg T(x)$, otteniamo che esiste una formula G per cui vale $G \leftrightarrow \neg T(\#G)$. Chiaramente, il codice di G è nell'insieme dei codici dei teoremi di P oppure no. Tuttavia, a questo punto, è possibile notare che sia assumendo la dimostrabilità di G in P, sia assumendo la non dimostrabilità di G in P giungiamo a una conclusione che contraddice la consistenza di P: questo è esattamente il segnale che ci permette di concludere che la teoria dell'aritmetica di Peano possiede enunciati che non possono essere né dimostrati né refutati per mezzo degli assiomi della teoria. Questo, approssimativamente, è il contenuto del primo teorema di incompletezza ed è l'oggetto del paragrafo 3.4. Degno di rilievo è il paragrafo successivo, in cui l'autore chiarisce diversi aspetti del teorema che spesso possono condurre il lettore a fraintendimenti. In particolare, è efficacemente spiegato in che senso la famosa frase riferita al primo teorema di incompletezza per cui "esistono enunciati aritmetici veri che non sono dimostrabili in P" sia quantomeno imprecisa.

I restanti due paragrafi del capitolo pongono l'attenzione sul secondo teorema di incompletezza, che sancisce l'impossibilità di dimostrare la consistenza di P all'interno di P stessa.

Il quarto capitolo considera l'ultimo dei tre principali risultati ottenuti da Gödel, che riguarda la relazione tra *insiemi costruibili* e la celebre *ipotesi del continuo* di Cantor, ovvero la tesi per cui non vi siano cardinalità strettamente comprese tra quella dei numeri naturali e quella dei numeri reali.

Detto in modo molto sbrigativo, gli insiemi costruibili sono quelli che possono essere interamente descritti in termini di insiemi più semplici. Richiamando l'esempio con cui Bruni riassume l'intuizione alla base degli insiemi costruibili, "non potrà darsi il caso che nel mondo degli insiemi costruibili la riunione insiemistica di una famiglia di insiemi faccia parte della famiglia medesima" (p.119). Il primo risultato di Gödel a questo proposito è discusso nel paragrafo 4.5 e consiste nel dimostrare che la teoria degli insiemi costruibili rende veri gli assiomi della teoria degli insiemi classica (ZF), anche in presenza dell'assioma di scelta. Ne consegue che, considerando l'*assioma di costruibilità* (V=L) come l'enunciato che afferma che tutti gli insiemi sono costruibili, la teoria ottenuta estendendo ZF per mezzo dell'assioma di costruibilità rimane consistente. Il secondo risultato ottenuto da Gödel sancisce la dimostrabilità dell'ipotesi del continuo all'interno dell'estensione di ZF ottenuta aggiungendo l'assioma di costruibilità. Si tratta della prima risposta dopo più di cinquant'anni al problema della dimostrabilità dell'ipotesi del continuo. Il capitolo termina con una discussione circa quegli enunciati che possono, in un certo senso, essere considerati *assolutamente indecidibili*, ossia che rimangono indecidibili in ogni estensione della teoria ottenuta mediante assiomi il cui contenuto possa essere ritenuto intuitivamente giustificabile.

Come già accennato, il quinto capitolo riassume i restanti contributi scientifici di Gödel. Oltre ai noti risultati che riguardano la relazione tra logica classica e intuizionista e ai diversi lavori sulla decidibilità della logica del prim'ordine, è interessante notare l'impegno di Gödel verso altri settori della matematica, dalla geometria all'analisi, dalla fisica all'economia (paragrafo 5.6). In particolare, complice l'intesa frequentazione con Einstein a Princeton, Gödel ha giocato un ruolo significativo addirittura all'interno della teoria della relatività, sviluppando uno dei primi modelli con essa compatibili.

Il sesto e ultimo capitolo, uno tra i più interessanti, specifica in modo molto efficace i limiti entro i quali è possibile relazionare la figura di Gödel al panorama filosofico. Se da un lato è innegabile che Gödel, a partire dal 1944, abbia gradualmente prestato sempre più attenzione al dibattito filosofico, dall'altro non vi è alcuna risorsa nei lavori di Gödel che possa essere considerata una vera e propria produzione filosofica. Come osserva l'A. relativamente alla possibilità di parlare di un Gödel filosofo: "l'analisi delle fonti sembra raccontare un'altra storia, a dire il vero, dalla quale emergono piuttosto le difficoltà da parte di Gödel a esprimere il proprio pensiero sugli aspetti concettuali legati alla propria attività di ricerca in un modo che gli risultasse pienamente soddisfacente. Questo fatto da solo è sufficiente a legittimare il dubbio che Gödel si sentisse a suo agio nel vestire i panni del filosofo, che in certi casi gli si vorrebbero mettere addosso, tanto quanto era stato a suo agio

nella prima fase della sua carriera in quelli del matematico" (p.150).
Detto ciò, Gödel, nella seconda parte della sua vita, si è parzialmente pronunciato relativamente ad alcuni importanti dibattiti filosofici quali l'opposizione tra la visione intuizionista e quella classica della matematica, lo statuto ontologico degli enti matematici e i limiti della mente umana rispetto alla loro conoscenza.
In generale, il libro di dell'A. si distingue per l'efficacia con cui l'autore riesce a "tradurre" in modo informale e divulgativo una notevole quantità di risultati tecnici senza perdere di precisione. Questo, sebbene naturalmente non possa dispensare il lettore seriamente interessato ai risultati di Gödel da uno studio attento degli aspetti tecnici, fornisce una preziosa risorsa per avvicinarsi e comprendere l'enorme portata concettuale del lavoro del logico moravo. Per tal ragione, il libro può essere apprezzato sia dal lettore "esperto", che già si muove con familiarità all'interno di lavori di Gödel, sia da chi, per la prima volta, ha curiosità di comprendere i motivi della sua fama.