

Alex Oliver, Timothy Smiley, *Plural Logic*, Oxford University Press, 2013, pp. 352, \$ 75.00, ISBN 9780199570423

Francesco Maria Ferrari, Università degli Studi di Padova

La semantica è quella scienza formale che studia le *condizioni di verità* delle espressioni linguistiche in relazione ai loro contenuti. La denotazione è la relazione semantica tra certe espressioni linguistiche, i termini, e i loro referenti. La tesi fondazionale di questo libro è che vi sono termini che possono avere più denotati e che la denotazione possa avere dunque un intrinseco carattere plurale (p.2). Al fine di giustificare questa tesi si deve 1) esporre l'insufficienza dei tentativi di ridurre tali termini alle condizioni espresse dalla denotazione singolare; 2) presentare e giustificare i concetti chiave per la denotazione plurale e 3) definire la logica formale plurale, sintassi e semantica.

Gli Autori dappprincipio mostrano (capp.1-4) come i termini plurali pongano questioni rilevanti per la logica nella misura in cui non sono eliminabili mediante le analisi e le conseguenti strategie "singolariste". Giungono alla conclusione che le evidenze del linguaggio naturale a supporto dei plurali esigono l'accoglimento della denotazione plurale nella sua forma genuina. Termini singolari e plurali devono coesistere "come specie diverse di un comune genere" (p.13).

Essi proseguono (capp.5-10), nel rispetto di tale posizione, con lo stabilire i concetti chiave per una logica della denotazione plurale: i termini plurali. L'analisi verte sulle possibilità di implementare le nozioni logiche di *quantificazione plurale* e di *inclusione* "≤" ("to be among" o "to be one of") – che già erano state presentate negli anni '80 da G. Boolos e poi sviluppate da vari autori. A tal fine, la nozione di *funzione a più valori* (*multi-valued*), per la costruzione di termini plurali, permetterebbe di estendere l'uso sintattico di "≤" concedendo ai termini plurali di stare anche alla sinistra della relazione. Una "funzione *multi-valued* è tale che a volte ha diversi valori [...] per lo stesso argomento" (p.140). "A volte", perché la logica plurale, se vuole estendere la logica "singolare", deve poter dare *un* valore per un argomento dato.

Con questi elementi, gli Autori sviluppano (capp.11-14) un sistema formale di logica plurale. Il primo passo è estendere il

sistema di logica predicativa del primo ordine ad uno analogo ma *libero da presupposizione esistenziale (topic neutral)*. Le ragioni che adducono sono due. In primis, “la logica classica viola il principio della *topic neutrality*: la fallacia esistenziale”. Ovvero “ $\forall xFx \rightarrow \exists xFx$ ” è una legge logica che implica a sua volta che il dominio sia “non-vuoto per una questione di necessità logica” (p.184). A partire dalla legge del *tertium non datur* si può infatti derivare “ $\exists x(Fx \vee \neg Fx)$ ”. Per tale ragione, in teoria dei modelli il dominio di interpretazione deve essere non-vuoto. Nel caso della logica plurale si giungerebbe alla necessità di un dominio addirittura infinito (almeno numerabile). In secundis, avendo concesso che il dominio sia vuoto, bisogna ammettere funzioni *parziali* – tali che per almeno un argomento non abbiano alcun valore – e per la valorizzazione (*val*) delle variabili e per l’interpretazione dei simboli del linguaggio – pena l’indefinibilità della nozione di *soddisfazione* (p.184). A tal fine viene introdotto un termine arbitrario non-denotante “*zilch*”. Ecco la clausola per le variabili singolari: “per ciascuna variabile x , *val* x è un individuo o *zilch*” (p.196).

Ma perché e come parlare di individui e non di elementi del dominio nelle clausole semantiche? L’importanza della condizione di *topic neutrality* per l’economia del ragionamento ha infatti non solo la duplice ragione sopra esposta ma anche un duplice scopo: 1) evitare, rifiutando la nozione di insieme, la deriva singolarista rintracciabile secondo gli Autori nella semantica estensionale a base insiemistica e 2) poter aprire la porta a pluralità genuine di oggetti, non potendo essere queste estensioni raccolte in unità insiemistiche: “Gli individui possono essere oggetti; ce ne possono essere nessuno o uno o più” (p.196).

La nozione di funzione *multi-valued* svela qui la sua importanza cardinale, dato che lo studio e la definizione della semantica formale plurale richiede, perché essa assurga a logica generale, una estensione della funzione *val* che sia in grado di coprire in modo omogeneo – nel meta-linguaggio – tanto il caso plurale che singolare, congiuntamente, e a condizione di essere *topic neutral*: “nel rispettare la *topic neutrality* della logica, vogliamo che la nostra versione del calcolo dei predicati sia capace di parlare di ogni cosa, e così anche il suo linguaggio-oggetto singolare ha la relativa semantica espressa in un meta-linguaggio plurale” (p.189). Restringiamo, allora, l’attenzione alla logica plurale e ad alcune sue proprietà.

La *mid-plural logic* (cap.12) è il sistema ottenuto aggiungendo al linguaggio-oggetto della base predicativa del primo ordine tre elementi logici: le *variabili plurali*, il predicato “ \leq ”, e un *operatore* per le *descrizioni definite* plurali (dette *exhaustive*).

Come linguaggio non-logico tale sistema include i termini plurali: costanti plurali e funzioni *multi-valued*. Come la logica classica, tale sistema è assiomatizzabile e completo a patto di mantenere libere le variabili plurali (p.14). La *full-plural logic* (cap.13) perde invece quest’ultima restrizione, estendendo il precedente sistema, mediante la quantificazione su tali variabili presenti nei termini aperti. È questo un sistema del *primo ordine* (p.233). Inoltre, aggiunge un secondo *operatore* per descrizioni (dette *plurally unique*). Tale sistema *non* è più assiomatizzabile e completo (p.236). Per esso *non* vale il teorema di Löwenheim-Skolem. È espressivo e categorico: ossia si comporta esattamente come un sistema di logica predicativa del secondo ordine, sebbene limitato al primo ordine. In generale, la semantica plurale vuole che se *a* è un argomento “*val a* stia per uno o più individui, o sia vuoto. Così *val* è parziale e per lo più *multi-valued*. Qualsiasi termine può essere vuoto, incluse le variabili, sia singolari che plurali” (pp.214-215).

La novità della tesi degli Autori, come già detto, gravita tutta attorno alla nozione di funzione *multi-valued*. Cerchiamo di enucleare il ragionamento per cui tali funzioni sarebbero giustificabili nell’uso di una teoria semantica. La logica plurale accogliendo i termini plurali deve motivare le funzioni che non si comportano in modo “canonico”. In generale, infatti, una funzione è una *relazione condizionata dall’unicità del valore*. Valori distinti per argomenti distinti se tale funzione è *iniettiva*. Una funzione *n*-aria può sempre essere definita mediante una relazione *n+1*-aria sul dominio, l’importante è che tale relazione sia definita mediante una *identità* fra gli *n*-argomenti cui si applica la funzione e il valore che la funzione dà, in modo da esprimere l’*unicità* dal valore. Così tra *descrizione definita* e *funzione* (descrittiva) vi è uno strettissimo legame, in quanto con la prima si denota, descrivendolo, un singolo oggetto, come singolo è il valore delle funzioni per *n* argomenti dati.

Gli Autori sostengono che nonostante “i matematici sin dal XVIII secolo abbiano considerato seriamente le funzioni *multi-valued* [...] [i] libri di logica, comunque, le definiscono fuori dall’esistenza, stipulando che una funzione produce al massimo un valore per qualsiasi argomento dato” (pp.5-6); che “una fonte

di ostilità verso le funzioni *multi-valued* è la fusione di funzioni e relazioni, combinata con uno stretto uso di ‘funzione’ per coprire solo quelle relazioni che sono identificate con le funzioni *single-valued*” (p.139). Contro tale ostilità, argomentano che il riconoscere l’interdefinibilità di funzioni e di relazioni non impedisce di considerare come *originariamente* distinte le due nozioni – secondo noi ciò dipende dal rifiuto della nozione di insieme come primitiva, come vedremo. L’intento è quello di giustificare l’indipendenza della nozione di funzione *multi-valued* dalla concezione riduzionista che se ne dà.

Ad esempio di tale concezione portano, tra i tanti, G. Peano: “per gli autori che parlano di funzioni *multi-valued* [*functio polydroma*], la parola ‘funzione’ è equivalente a ‘relazione’” (p.146). In generale, diverse sono le strategie “riduzioniste” rintracciate: o “Rimpiazzare le funzioni con le relazioni” o “Rimpiazzare i molti valori mediante un insieme” o “Rimpiazzare la funzione *multi-valued* con una *single-valued* su un dominio allargato” (pp.150). Comunque, la tesi degli Autori è che le funzioni *multi-valued* “non possono essere identificate con (o rimpiazzate dalle) relazioni, o altrimenti eliminate” e, pertanto, “la loro presenza non introduce alcuna ambiguità questionabile” (p.14) come invece, a loro parere, nella concezione ‘riduzionista’, ove *multi-valued* è la relazione, in quanto originariamente uno-molti.

Le ragioni degli Autori vengono espone esclusivamente tramite esempi (p.139). Preso il caso “ $\sqrt{4} = \pm 2$ ”, argomentano: “il simbolo di funzione ‘ \pm ’, come ‘ $\sqrt{\quad}$ ’, esprime una funzione *multi-valued*. ‘ $\sqrt{4}$ ’ e ‘ ± 2 ’ sono ciascuno segni per due numeri distinti, non uno” (come meglio espresso nell’introduzione, p.6). Ancora: “ $\sqrt{\quad}$ è *multi-valued* perchè sia 2 che -2 sono le radici quadrate di 4, anche se c’è solo una radice quadrata di 0” (p.140). Sostengono, poi, che l’espressione “ $2 = \sqrt{4} = -2$ quindi $2 = -2$ ” è “la più oscena delle fallacie che coinvolge le funzioni *multi-valued*” perchè l’argomentazione sarebbe pertinente solo se “ $\sqrt{4}$ ” fosse “considerato come un termine singolare, il che sarebbe assurdo nel contesto” (p.149). Tralasciando altri esempi – atti a mostrare come in alcuni domini il fenomeno sia “omnipresente”, come “nel regno dei numeri complessi” (p.141), i.e. “ $\sqrt{-1}$ ” “denota i e $-i$ ” (p.79) – gli Autori precisano ulteriormente che tale fenomeno sia relativo alle funzioni *inverse* (t.c. hanno per valore l’argomento della

funzione data): “[q]ui e altrove siamo interessati a \sqrt{x} come l’inversa di x^2 , e presupponiamo che il suo dominio includa gli interi positivi e negativi” (p.140).

Purtroppo, non siamo in grado di cogliere l’evidenza dell’argomentazione degli Autori: che la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$, sia l’inversa (f^{-1}) della funzione (f) $x \mapsto x^2$, con $x \in \mathbb{R}$, con la sola condizione che $x \geq 0$. Ma, da manuale, la funzione $x \mapsto x^2$ non è invertibile su \mathbb{R} non essendo iniettiva. Infatti, a ciascun argomento non corrisponde uno e un solo valore, dato che i numeri interi positivi e negativi con stesso valore assoluto hanno lo stesso quadrato. Piuttosto, l’inversione è possibile a condizione che $x \in \mathbb{R}_+$, ossia, a patto di restringere il dominio \mathbb{R} all’intervallo $[0, +\infty)$ della funzione originaria di elevamento al quadrato. Infatti, il valore di $\sqrt{4}$ è 2 e non ± 2 ; e di $\sqrt{-1}$ è i e non $\pm i$, come, invece, gli Autori.

Una cosa è il valore di una funzione, un’altra è la soluzione di una equazione quale $\sqrt{x^2} = \pm x$: infatti nulla va contro il sostenere che: se una funzione mappa ciascun numero complesso x su un numero ben definito x^2 , la sua inversa \sqrt{x} mappa, per esempio, il valore $x = 1$ sulla classe di equivalenza “ $\sqrt{1} = \pm 1$ ”, come quando gli Autori inducono a pensare a “ $\pm x$, definibile come $\sqrt{x^2}$ ” (p.79).

Purtroppo, in mancanza di una definizione esplicita di funzione *multi-valued* che non faccia uso della nozione di relazione (o di insieme), gli esempi che gli Autori riportano sembrano mostrare una – in certo modo indebita – sovrapposizione tra valore di una funzione e soluzione/i di una equazione. Basandoci su tale argomentazione, la tesi secondo cui le funzioni *multi-valued* sono una specie distinta da quelle *single-valued* non ci pare affatto evidente ma, anzi, controintuitiva e, in generale, ci pare impedire una comprensione pre-teorica della denotazione plurale che affranchi tale nozione da critiche. A nostro parere, questa svista argomentativa permette di aggredire la teoria dei termini plurali a partire dalla caratterizzazione *multi-valued* della nozione di funzione *val* per le variabili plurali usata nella definizione della nozione semantica di soddisfazione, come di conseguenza, fino a quelle derivate di denotazione e verità.

Come anticipato, in mancanza di questa distinzione, la tesi centrale sembrerebbe fondarsi unicamente sul rifiuto degli insiemi come primitivi elementi semantici. Proposta che valutiamo comunque come interessante e che non mancherà di

sollevare dibattito tra gli studiosi.

Bibliografia

Plural Quantification: Øystein Linnebo, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. by E. N. Zalta, 2008.
<http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/plural-quant/>

Ulteriori recensioni del volume

David J. Nicolas, *Notre Dame Philosophical Review. An Electronic Journal*, 2014
<http://ndpr.nd.edu/news/46406-plural-logic/>

Link utili

<http://mathworld.wolfram.com/MultivaluedFunction.html>